Вестник Тюменского государственного университета.
2014. № 7. Физико-математические науки. Информатика. 137-146

МАТЕМАТИКА

© А.Д. НОВИКОВ

Армавирская государственная педагогическая академия
novikovnad@mail.ru

УДК 517.53: 372.851

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

GEOMETRIC AND PHYSICAL MEANING OF THE FUNCTION OF REAL AND COMPLEX VARIABLES

АННОТАЦИЯ. В статье анализируются различные подходы в теории функций комплексной переменной к выявлению ее геометрического смысла. Рассмотрены различные трактовки геометрического смысла функций одной комплексной переменной. Используя геометрическую трактовку функции комплексной переменной в виде отображения одной комплексной на другую и соответствующую аналогию для функции одной действительной переменной, выявлен ее физический смысл. Посредством метода аналогий выявлен также физический смысл функции одной комплексной переменной. Таким образом, предложена интерпретация физического смысла функций действительной и комплексной переменной, основанная на едином подходе к его (смысла) пониманию как для функции действительной, так и для функции комплексной переменной. В качестве количественной оценки этого свойства функций используется коэффициент деформации области определения функции в исследуемой точке, представляющий собой количественную меру изменения плотности равномерно распределенных точек при заданном отображении. В зависимости от вида деформации (растяжение, сжатие) этот коэффициент оказывается меньше либо больше единицы.

SUMMARY. This article analyzes the various approaches to the theory of functions of a complex variable to identify its geometric meaning. Different interpretations of the geometric meaning of the functions of a complex variable are considered. Using a geometric interpretation of the function of a complex variable in the form of mapping one complex to another and relevant analogy for extending the functions of one real variable, its physical meaning is revealed. Physical meaning of the function of a complex variable is identified by the method of analogies. Thus, the interpretation of the physical meaning of the functions of real and complex variables, based on a common approach to it (meaning) understanding as to the real function, and for the function of a complex variable is proposed. The deformation coefficient domain of the function at the point is used as a quantitative evaluation of the functions properties. It is a quantitative measure of the change in the density of uniformly distributed points in the given map. In accordance with the deformation pattern (tension, compression), this ratio is ether less or higher than neutral element.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Функция, комплексная переменная, геометрический смысл, действительная часть, мнимая часть.

KEY WORDS. Function, complex variable geometric meaning, real part, imaginary part.

Как известно, геометрический смысл функции одной действительной переменной представляет собой ее график в декартовой системе координат. Другими словами, это множество точек координатной плоскости $\{(x,y)\}$, таких, что $x \in X$, $x \in Y$, где X — область определения и Y — область значений рассматриваемой функции $y = f(x)$, что кратко записывается в виде $\Gamma(y = f(x)) = \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$ и изображается, в общем случае, как совокупность кривых и изолированных точек в декартовой системе координат. При этом график функции $\Gamma(y)$ представляет собой цельный геометрический образ функции $y = f(x)$ в плоскости (XOY), синтезирующий изменение координат x и y вдоль осей (OX) и (OY) соответственно и «объединяя эти две разрозненные оси в имеющемся у нас представлении плоскости ...» [1; 232].

Аналогичный подход к выявлению геометрического смысла функции одной комплексной переменной невозможен ввиду двух причин, для рассмотрения которых необходимо сформулировать то определение понятия функции одной комплексной переменной, на которое мы будем ссылаться в дальнейшем.

Поскольку наше дальнейшее исследование опирается на теоретико-множественное определение функции одной комплексной переменной, то приведем основные понятия такого подхода.

Под *соответствием* понимается произвольное множество упорядоченных пар $\{(z,w)\}$, где $z \in M \subset C$, $w \in N \subset C$. Здесь множество M — область определения этого соответствия и N — его область значений; C — множество комплексных чисел.

Определение. Функцией одной комплексной переменной называется всякое однозначное соответствие.

Таким образом, функция одной комплексной переменной — это множество пар точек $\{(z,w) | z \in M, w \in N\}$, где $w = f(z)$. Из этого определения с необходимостью также следует, что всякая функция одной комплексной переменной определена, если заданы две ее компоненты — закон функциональной зависимости и область определения. Однако точки $z(x,y)$ и $w(u,v)$ принадлежат различным плоскостям (z) и (w) соответственно и, следовательно, не могут быть синтезированы в цельный геометрический образ, поскольку для этого потребовалось бы четырехмерное пространство точек с координатами (x, y, z, w), но это недоступно в нашем трехмерном пространстве. Поэтому из-за отсутствия цельного геометрического образа функции $w = f(z)$ « ... нам приходится довольствоваться двумя разрозненными плоскостями XOY и UOV, причем на первой из них изображается изменение независимого переменного z, а на второй — изменение зависимого переменного w».

В некоторых случаях оказывается продуктивным другой способ геометрической интерпретации функции одной комплексной переменной. В пространстве изображается поверхность $\rho = |f(z)|$, называемая *поверхностью модуля* или *рельефом* функции $w = f(z)$. Если на этой поверхности изобразить множества уровня $Arg\ f(z) = const$, то их достаточно густая сетка позволяет составить достаточно полное представление об изменениях функции в полярных координатах [2; 29].

В силу того, что $z = x+iy$, и $w = u(x, y) + iv(x, y)$, известен еще один способ геометрической иллюстрации понятия функции комплексной переменной. Для этого в трехмерном пространстве изображают две поверхности $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, которые и дают представление об изменении функции $f(z)$ [2; 27]. Однако последние два подхода к иллюстрации геометрического смысла функции комплексной переменной оказались неудобны, поскольку с их помощью все же оказывается невозможным создание синтезированного (цельного) образа функции $w = f(z)$, хотя и эти два способа геометрической иллюстрации функции $w = f(z)$, с учетом появления компьютерных систем математики (КСМ), в некоторых конкретных случаях могут оказаться полезными в профессиональных исследованиях. Третий способ геометрической интерпретации функции комплексной переменной предложил Хеффтер [3; 63]. Он состоит в том, что записав функцию в показательной форме $w = re^{i\theta}$, строится поверхность $r = r(x, y)$, называемая поверхностью модуля функции. И затем на ней отмечаются значения θ. Иногда изображают θ кривыми на поверхности $r = r(x, y)$.

Отметим также, что существует и другое истолкование ТФКП. В соответствии с ним «В основе аналитической теории функций лежит не *теоретико-множественное* толкование функции как соответствия между объектами двух множеств (комплексными числами), а идущее от классиков математической науки — в первую очередь от Леонарда Эйлера — *оперативное* толкование: функция задана, если указано, какие математические операции в каком порядке надлежит выполнить над числовым значением независимого переменного, чтобы получить соответствующее ему значение зависимого переменного» [4; 29]. И далее: «...оперативное определение понятия функции не *отвергает* теоретико-множественного и *не стоит с ним в противоречии*: оно его лишь ограничивает» [4; 29].

По поводу «оперативного» толкования функции, в настоящее время называемого генетическим, и ссылки на знаменитого ученого Л. Эйлера, отметим, что «Наряду с понятием функции, как аналитическим выражением, Эйлер выдвинул и другое, более общее определение ее как поэлементного соответствия между двумя числовыми множествами. Разумеется, такое представление по существу лежало в основе всех теоретико-множественных рассуждений, и Эйлеру не раз пришлось пользоваться именно этим пониманием, а не определением функции как аналитического выражения» [5; 84], так что представлять Л. Эйлера как убежденного сторонника операционного определения понятия функции одной комплексной переменной как минимум некорректно. Более того, знаменитые российские математики, даже в своих работах прикладного характера (физика, техника) подчеркивают, что для задания функции необходимо указать две ее компоненты — область определения и закон функциональной зависимости. Например, в [6; 8] академик М.А. Лаврентьев следующим образом вводит понятие функции комплексной переменной «Пусть каждому значению комплексного числа $z = x+iy$, принадлежащему области D, расположенной в z-плоскости, соответствует значение комплексного числа $w = u+iv$. В этом случае мы скажем, что w есть функция z, $w = f(z)$; число z назовем независимым переменным, область D — областью задания $f(z)$». Аналогично функция комплексной переменной вводится и в [7-10].

Понятие функции прошло несколько этапов своего исторического развития и становления. Если речь идет о функциях действительной переменной, то таких этапов три: 1) представление о функциональной зависимости как о геометрической функции точки кривой; 2) понимание функции как зависимости между независимой и зависимой переменными; 3) понимание функции как однозначного соответствия между множествами. Для понятия функции комплексной переменной характерны лишь второй и третий этапы его развития и становления.

Таким образом, операционное (или генетическое) определение функции — это всего лишь исторический этап, предшествующий теоретико-множественному ее определению. Однако различие между этими определениями имеется и оно существенно. Если из операционного понимания функции не следует, что для ее задания требуются две компоненты — область определения и закон функциональной зависимости (необходимо еще определение — определение равных функций), то из теоретико-множественного ее определения это следует с необходимостью. Другими словами, операционное (генетическое) понятие функции в настоящее время уже не соответствует современной (теоретико-множественной) тенденции развития математики.

Подводя итог различным подходам к геометрической иллюстрации функции одной комплексной переменной, приходим к однозначному выводу — цельного геометрического образа функциональной зависимости $w = f(z)$ по объективной причине, описанной выше, создать (синтезировать) невозможно.

Поэтому для более глубокого понимания природы функции $w = f(z)$ выявим ее физический смысл, не имеющий никакого отношения к гидромеханическому истолкованию аналитической функции, где широко используются дифференциальное и интегральное исчисления ТФКП. Для этого рассмотрим геометрическую интерпретацию функции одной действительной переменной $y = f(x)$ аналогично тому, как это общепринято при изучении функций комплексной переменной, то есть в виде отображения $y = f(x)$ области определения функции (некоторой части оси (OX)) на ось области значений функции (OY). Для этого расположим оси (OX) и (OY) взаимно параллельно и рассмотрим, например, функцию $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D(x) = \{0;1;2;3\}$, при этом несущественно, из каких именно точек состоит множество $D(x)$. Важно, чтобы эти точки были равномерно распределены на этой оси, представляя собой арифметическую прогрессию. Изобразим эти точки на оси (OX) и соответствующие им точки области значений этой функции $E(y) = \{0;1;4;9\}$ на оси (OY) (рис. 1).

Рассматривая получившееся отображение множества изолированных и равномерно распределенных точек по оси (OX) на ось (OY), видим, что равномерно распределенные точки первой оси отобразились на второй оси (ось (OY)) неравномерным образом. При этом область значений функции занимает в соответствии с отображением $y = f(x) = x^2$ оси (OY) участок в три раза больший, чем область определения функции на оси (OX). Другими словами, пользуясь физико-геометрической терминологией, имеем факт, состоящий в том, что равномерное распределение точек на оси (OX) отобразилось функцией $y = x^2$ в менее плотное распределение их образов на оси (OY).

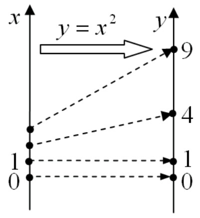

Рис. 1.

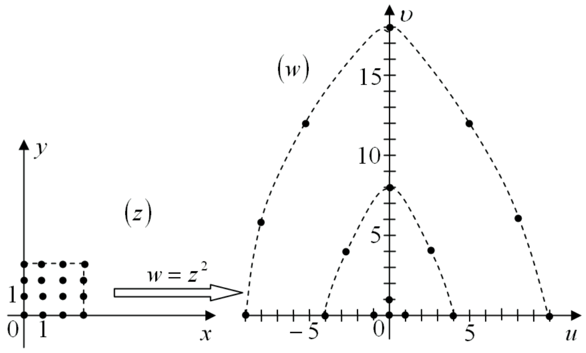

Рис. 2.

Обратим внимание на то, что если бы область определения функции состояла из равномерно распределенных точек отрезка [0;1], то плотность образов этих точек, наоборот, увеличилась бы. Таким образом, *физический* смысл функции действительной переменной заключается в изменении *плотности* распределения значений функции на оси (OY) по отношению к исходной равномерной плотности соответствующих значений ее аргумента на оси (OX). Величину этого изменения можно оценить посредством коэффициента деформации оси $k = \lim\limits_{\Delta\ell \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\Delta L}{\Delta\ell}}$, где $\Delta\ell$ — длина отрезка оси (OX), содержащего равномерно распределенные точки; ΔL — длина образа этого отрезка на оси (OY) при отображении $w = z^2$.

Воспользуемся аналогичным подходом для выявления физического смысла функции комплексной переменной. Для этого сравним плотность равномерно распределенных точек аргумента z в плоскости (z) с плотностью соответствующих их образов на плоскости (w) при отображении $w = z^2$, отображающем, например, множество точек (область определения функции) плоскости (z) M_1={(0;0),(1;0),(2;0),(3;0),(0;1),(1;1),(2;1),(3;1)}$\cup${(0;2),(1;2),(2;2),(3;2),(0;3),(1;3),(2;3),(3;3)} на плоскость (w) (рис. 2). Как видно на рис. 2, плотность распределения образов точек из области значений функции $w = z^2$ (плоскость (w)) заметно меньше плотности равномерного распределения точек области определения этой функции (плоскость (z)). При этом образы точек отображения $w = z^2$ занимают не только первую, но и вторую четверти плоскости (w). В этом также нетрудно убедиться, если представить комплексное число z в показательной форме $z = re^{i\varphi}$. Тогда $w = z^2 = (re^{i\varphi})^2 = r^2e^{2i\varphi}$, откуда видно, что аргумент образа точки увеличивается в два раза ($\psi = 2\varphi$) и, следовательно, часть образов точек оказывается во второй четверти системы декартовой системы координат (UOV).

Оценим количественно изменение плотности распределения образов точек плоскости (w), сравнив ее с плотностью равномерно распределенных точек в плоскости (z). Плотность равномерно распределенных точек в плоскости (z) $\rho_z = \dfrac{16}{9}$. Плотность распределения образов этих точек в плоскости (w) $\rho_w = \dfrac{16}{\Delta S}$, где ΔS — площадь, ограниченная осью u и внешними пунктирными линиями, представляющими собой две параболы $u = 9 - \dfrac{\upsilon^2}{36}$ и $u = -9 + \dfrac{\upsilon^2}{36}$. Площадь контура ΔS, ограниченного этими линиями, найдем, вычислив интеграл $\Delta S = 2\int_0^{18}\left(9 - \dfrac{\upsilon^2}{36}\right)d\upsilon = 216$. Тогда, соответствующее значение среднего коэффициента изменения плотности распределения точек $k_{cp.1} = \dfrac{\rho_{w1}}{\rho_{z1}} = \dfrac{(\Delta s)_1}{(\Delta S)_1} = \dfrac{1}{24}$,

т.е. плотность равномерного распределения точек области определения в точке (0;0) при отображении $w = z^2$ в соответствующей точке (0;0) плоскости (w) уменьшилась в среднем в 24 раза.

Поскольку изменение плотности распределения точек при отображении $w = z^2$ вычисляется в точке $z = 0$, то для более точного подсчета среднего коэффициента изменения плотности распределения точек в качестве области определения выберем множество $M_1 = \{(0;0),(1;0),(2;0),(0;1),(1;1),(2;1)\} \cup \{(0;2),(1;2),(2;2)\}$.

Выполнив аналогичные предыдущим вычисления, получим $k_{cp.2} = \dfrac{(\Delta s)_2}{(\Delta S)_2} = \dfrac{27}{128}$.

Отсюда видно, что количество точек в плоскости не имеет значения, поскольку их количество в плоскости (z) равно количеству их образов в плоскости (w). Здесь важно то, чтобы в плоскости (z) их распределение было равномерным. Тогда коэффициент, характеризующий изменение плотности распределения точек отображенной области в фиксированной ее точке (деформация плоскости) может быть вычислен как предел $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} 1/(\Delta S/\Delta s)$. В нашем примере в точке (0;0) плоскости (z), выбрав в качестве окрестности этой точки квадрат со стороной $\Delta x = \Delta y = \Delta t$, имеем $\Delta s = (\Delta t)^2$. Образом квадратного контура в плоскости (z) при отображении $w = z^2$ будет контур, аналогичный рассмотренному (рис. 2) с вершиной в точке $\left(0; 2(\Delta t)^2\right)$. Точки прямых $x = 0$ и $y = 0$ плоскости (z) отобразятся в соответствующие им точки прямой $u = 0$ плоскости (w). Прямые $x = \Delta t$ и $y = \Delta t$ отобразятся в параболы $u = (\Delta t)^2 - \dfrac{\upsilon^2}{4(\Delta t)^2}$ и $u = -(\Delta t)^2 + \dfrac{\upsilon^2}{4(\Delta t)^2}$.

Тогда $\Delta S = 2\int_0^{2(\Delta t)^2}\left[(\Delta t)^2 - \dfrac{\upsilon^2}{4(\Delta t)^2}\right]d\upsilon = \dfrac{4}{3}(\Delta t)^4$. Отсюда находим коэффициент деформации плоскости (z) в точке (0;0) при ее отображении функцией $w = z^2$ на плоскость (w): $k = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta s \to 0}\dfrac{4(\Delta t)^2}{3}} = \infty$. Такой результат в точке (0;0) объясняется

тем, что при отображении $w = z^2$ плотность образов точек неограниченно уменьшается за счет неограниченного уменьшения занимаемой ими площади.

В более общем случае коэффициент деформации плоскости для функции $w = z^2$ может быть рассчитан следующим образом. Выберем в плоскости (z)

произвольно фиксированную точку $z_0 = x_0+iy_0$ и некоторую ее прямоугольную окрестность (см. рис. 3) в виде контура $(ABCD)$, который функция $w=z^2$ отображает на контур $(A_1B_1C_1D_1)$. Область, ограниченная контуром $(ABCD)$, отображается на область, ограниченную контуром $(A_1B_1C_1D_1)$.

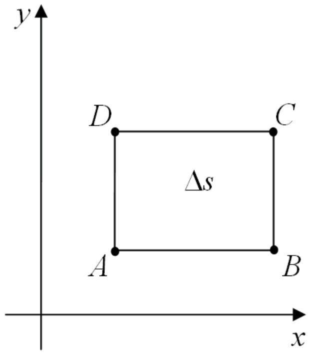

Рис. 3

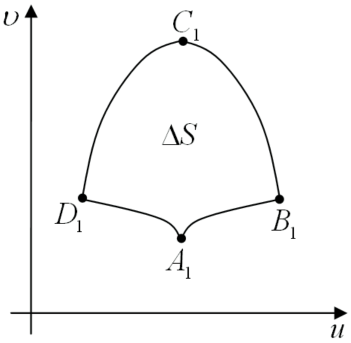

Рис. 4

Форму окрестности фиксированной точки можно выбирать произвольно, поскольку коэффициент деформации плоскости не зависит от вида окрестности этой точки плоскости (z) . В нашем случае звенья контура $(ABCD)$ следующим образом отобразились в звенья контура $(A_1B_1C_1D_1)$:

$$(AB): y = y_0 \to u = \frac{\upsilon^2}{4y_0^2} - y_0^2 : \ (A_1B_1),$$

$$(BC): x = x_0 + \Delta x \to u = (x_0 + \Delta x)^2 - \frac{\upsilon^2}{4(x_0 + \Delta x)^2} : (B_1C_1),$$

$$(CD): y = y_0 + \Delta y \to u = \frac{\upsilon^2}{4(y_0 + \Delta y)^2} - (y_0 + \Delta y)^2 : (C_1D_1),$$

$$(DA): x = x_0 \to u = x_0^2 - \frac{\upsilon^2}{4x_0^2} : (D_1A_1) .$$

При этом характерные точки (общие точки последовательных звеньев ломаной) отображаются следующим образом:

$$A(x_0, y_0) \to A_1(x_0^2 - y_0^2, 2x_0y_0),$$

$$B(x_0 + \Delta x, y_0) \to B_1\left((x_0 + \Delta x)^2 - y_0^2, 2(x_0 + \Delta x)y_0\right),$$

$$C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \to C_1\left((x_0 + \Delta x)^2 - (y_0 + \Delta y)^2, 2(x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)\right),$$

$$D(x_0, y_0 + \Delta y) \to D_1\left(x_0^2 - (y_0 + \Delta y)^2, 2x_0(y_0 + \Delta y)\right).$$

Вычислим коэффициент деформации плоскости (z) при отображении $w = z^2$, например, в точке $A(1;1)$. Выбрав $\Delta x = \Delta y = \Delta t$, получим следующие отображения звеньев ломаной $(ABCD)$ и характерных точек:

$$(AB): y = 1 \rightarrow u = \frac{\upsilon^2}{4} - 1 : (A_1B_1),$$

$$(BC):\ x = 1 + \Delta t \rightarrow u = (1 + \Delta t)^2 - \frac{\upsilon^2}{4(1 + \Delta t)^2} : (B_1C_1),$$

$$(CD): y = y_0 + \Delta t \rightarrow u = \frac{\upsilon^2}{4(1 + \Delta t)^2} - (1 + \Delta t)^2 : (C_1D_1),$$

$$(DA): x = x_0 \rightarrow u = 1 - \frac{\upsilon^2}{4} : (D_1A_1),$$

$$A(1;1) \rightarrow A_1(0;2),\ B(1 + \Delta t, 1) \rightarrow B_1(\Delta t(2 + \Delta t), 2(1 + \Delta t)),$$

$$C(1 + \Delta t, 1 + \Delta t) \rightarrow C_1\left(0, 2(1 + \Delta t)^2\right),\ D(1, 1 + \Delta t) \rightarrow D_1(-\Delta t(2 + \Delta t), 2(1 + \Delta t)).$$

Соответственно, величины отображаемой площади и площадь ее образа нетрудно вычислить:

$$\Delta s = \Delta x \cdot \Delta y = \Delta t^2;$$

$$\Delta S = 2\int_{2}^{2(1+\Delta t)} \left(\frac{\upsilon^2}{4} - 1\right) d\upsilon + \int_{2(1+\Delta t)}^{2(1+\Delta t)^2} \left[(1 + \Delta t)^2 - \frac{\upsilon^2}{4(1 + \Delta t)^2}\right] d\upsilon =$$

$$= \frac{8(\Delta t)^2}{3} \cdot \left[3 + 3t + (\Delta t)^2\right].$$

Следовательно, коэффициент деформации плоскости в точке (1;1) при отображении $w = z^2$ равен:

$$k_{(1;1)} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta s}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{8}{3}\left(3 + 3\Delta t + (\Delta t)^2\right)} = \frac{1}{8}.$$

Этот результат означает, что в точке (1;1) плоскость при отображении $w = f(z)$ подверглась восьмикратной деформации растяжения. Другими словами, если окрестность точки (1;1) плоскости (z) содержит область равномерного распределения точек (постоянная плотность), то плотность распределения точек в образе этой точки (0;2) плоскости (w) уменьшается в 8 раз.

Если речь идет об отображении линий, то коэффициент деформации плоскости в каждой точке образа линии рассчитывается по той же формуле, что и для функции одной действительной переменной $k = \lim\limits_{\Delta\ell \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta L}{\Delta \ell}}$, где $\Delta\ell$ и ΔL — дины линий в плоскостях (z) и (w) соответственно.

Таким образом, приходим к следующим выводам:

1. Физический смысл функции одной действительной переменной заключается в изменении плотности равномерного распределения точек оси (OX) при их отображении $y = f(x)$.

2. Величину этого изменения можно оценить посредством коэффициента деформации оси $k = \lim\limits_{\Delta\ell \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\Delta L}{\Delta \ell}}$, где $\Delta\ell$ — длина отрезка оси (OX), содержащего равномерно распределенные точки; ΔL — длина отрезка оси (OY), содержащего образы этих точек.

3. Функции комплексной переменной имеют физический смысл, заключающийся в том, что при отображении $w = f(z)$ каждой точке z_0 плоскости (z) ее образу при отображении $w_0 = f(z_0)$ соответствует коэффициент деформации плоскости.

4. Величина коэффициента деформации плоскости зависит лишь от координат образа точки и отображающей функции $w = f(z)$ и рассчитывается по формуле $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} 1/(\Delta S/\Delta s)$, где (Δs) — площадь, ограниченная контуром с равномерно распределенными точками; (ΔS) — площадь образа области на плоскости (w).

Коэффициент деформации плоскости в каждой точке образа линии рассчитывается по той же формуле, что и для функции одной действительной переменной $k = \lim\limits_{\Delta\ell \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\Delta L}{\Delta \ell}}$, где $\Delta\ell$ и ΔL — длины линий в плоскостях (z) и (w) соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лузин Н.Н. Интегральное исчисление. М.: Советская наука, 1958. 415 с.
2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1969. 576 с.
3. Уиттекер Э.Е., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М.: Едиториал УРСС, 2002. 856 с.
4. Гончаров В.Л. Теория функций комплексного переменного. М.: Государственное педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1955. 352 с.
5. Хрестоматия по истории. Математический анализ. Теория вероятностей. Пособие для студентов пед. ин-тов. Под ред. А.П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1977. 224 с.
6. Лаврентьев М.А. Конформные отображения. М.: ОГИЗ-ГОСТЕХИЗДАТ, 1946. 159 с.
7. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. М.: Высш. шк., 1988. 167 с.
8. Хапланов М.Г. Теория функций комплексного переменного. М.: Просвещение, 1965. 208 с.
9. Горин Е.А. Введение в теорию аналитических функций. М.: Изд-во МПГУ, 2005. 163 с.
10. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. М.: Просвещение, 1977. 320 с.

REFERENCES

1. Luzin, N.N. *Integral'noe ischislenie* [Integral calculus]. Moscow, 1958. 415 p. (in Russian).

2. Shabat, B.V. *Vvedenie v kompleksnyi analiz* [Introduction to complex analysis]. Moscow, 1969. 576 p. (in Russian).

3. Uitteker, E.E., Vatson, Dzh.N. *Kurs sovremennogo analiza* [A course of modern analysis] / Transl. fr. Eng. Moscow, 2002. 856 p. (in Russian).

4. Goncharov, V.L. *Teoriia funktsii kompleksnogo peremennogo* [Theory of functions of a complex variable]. Moscow, 1955. 352 p. (in Russian).

5. *Khrestomatiia po istorii. Matematicheskii analiz. Teoriia veroiatnostei. Posobie dlia studentov ped. in-tov* [Readings on the history. Mathematical analysis. The theory of probabilities. Students' manual of pedagogical institutions] / Ed. by A.P. Iushkevich. Moscow, 1977. 224 p. (in Russian).

6. Lavrent'ev, M.A. *Konformnye otobrazheniia* [Conformal mappings]. Moscow, 1946. 159 p. (in Russian).

7. Solomentsev, E.D. *Funktsii kompleksnogo peremennogo i ikh primeneniia* [Functions of a complex variable and their applicability]. Moscow, 1988. 197 p. (in Russian).

8. Khaplanov, M.G. *Teoriia funktsii kompleksnogo peremennogo* [Theory of functions of a complex variable]. Moscow, 1965. 208 p. (in Russian).

9. Gorin, E.A. *Vvedenie v teoriiu analiticheskikh funktsii* [Introduction to the theory of analytic functions]. Moscow, 2005. 163 p. (in Russian).

10. Markushevich, A.I., Markushevich, L.A. *Vvedenie v teoriiu analiticheskikh funktsii* [Introduction to the theory of analytic functions]. Moscow, 1977. 320 p. (in Russian).

Автор публикации

Новиков Александр Дмитриевич — доцент кафедры математики и методики ее преподавания Армавирской государственной педагогической академии, кандидат педагогических наук

Author of the publication

Alexander D. Novikov — Cand. Sci. (Pedag.), Associate Professor, Department of Mathematics and its Teaching Methods, Armavir State Pedagogical Academy